<u>ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ</u>

<u>Ταξινόμηση - Μεθοδολογία για τη λύση των ασκήσεων</u>

1) *<u>Ασκήσεις εφαρμογής των **εξισώσεων κίνησης**</u>*

α) Προσδιορίζουμε το είδος της κίνησης από την εκφώνηση του προβλήματος και εφαρμόζουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις της θεωρίας, όπου αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε τα ζητούμενα, π.χ. να βρούμε την ταχύτητα (υ), την θέση (x), το διάστημα (s) ενός κινητού ή την χρονική στιγμή (t) που τα μεγέθη αυτά παίρνουν κάποιες συγκεκριμένες τιμές.
<u>Πάντα κατασκευάζουμε ένα σχήμα όπου απεικονίζονται οι κινήσεις που περιγράφονται στο πρόβλημα και σημειώνουμε σε αυτό, με σύμβολα, όλα τα μεγέθη που δίνονται ή ζητούνται.</u>
β) Πολλές φορές μας δίνουν μια εξίσωση και μας ζητούν να βγάλουμε συμπεράσματα για το είδος της κίνησης ή
γ) μας ζητούν να κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα της κάθε κίνησης.

2) *<u>Ασκήσεις με **διαγράμματα** (γραφικές παραστάσεις)</u>*

α) Στις περιπτώσεις αυτές μας ζητούν από ένα διάγραμμα (x-t) να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο διάγραμμα (υ-t) και το αντίστροφο, ή από ένα διάγραμμα (α-t) να κατασκευάσουμε τα προηγούμενα διαγράμματα.
β) Μας δίνουν κάποιο διάγραμμα και μας ζητούν να βρούμε τα είδη των κινήσεων.
γ) Μας δίνουν τα διαγράμματα δύο κινητών και μας ζητούν τα είδη των κινήσεων, ή τη χρονική στιγμή που συναντιούνται τα δύο κινητά και άλλα ζητούμενα.

3) *<u>Ασκήσεις όπου **ένα κινητό** εκτελεί διαδοχικά δύο ή περισσότερα είδη κινήσεων</u>*

4) *<u>Ασκήσεις όπου **δύο κινητά** εκτελούν το ίδιο ή διαφορετικά είδη κίνησης – συνάντηση δύο κινητών.</u>*

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

Ευθύγραμμη Ομαλή κίνηση (ΕΟκ)

i) Στις εξισώσεις κίνησης της ΕΟκ: $x= x_o+υ(t-t_o)$, $x = x_o+υt$ $x = υt$ και $Δx =υ\cdot Δt$ τα μεγέθη x, x_o, $Δx$ και υ είναι αλγεβρικά. Έτσι:
α) Η συντεταγμένη θέσης x και η συντεταγμένη θέσης x_o τη χρονική στιγμή $t_o=0$ έχουν θετικές τιμές, όταν το κινητό βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα, και αρνητικές τιμές όταν βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα.
β) Η ταχύτητα υ έχει θετική τιμή, όταν το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και αρνητική τιμή, όταν κινείται κατά την αρνητική φορά.

ii) Έστω ότι η κίνηση ενός κινητού είναι ευθύγραμμη και περιγράφεται από την εξίσωση x = 3 - 6t (S.I.). Τότε:
α) Προκύπτει ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή γιατί η εξίσωση x =f(t) είναι πρωτοβάθμια.
β) Συγκρίνοντας την εξίσωση αυτή με την αντίστοιχη της θεωρίας έχουμε:

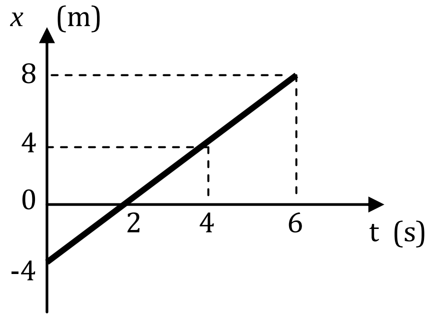
$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - 6t \\ x = x_o + υt \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_o = 3\ m \quad \text{και } υ = -6\ m/s$$

iii) Από ένα διάγραμμα υ-t μπορώ να πάρω πληροφορίες για:

a) την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ του κινητού οποιαδήποτε χρονική στιγμή t,
b) την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt (εμβαδό),
c) το διάστημα S που διάνυσε το κινητό σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt.

iv) Από ένα διάγραμμα θέσης – χρόνου (x-t) πάρω πληροφορίες για:

a) τη θέση x του κινητού σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή,
b) την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης Δx του κινητού σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt.
c) την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ του κινητού σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.



<u>Παράδειγμα:</u> Από το διάγραμμα του παραπάνω σχήματος, το οποίο αναφέρεται σε σημειακό αντικείμενο που κινείται ευθύγραμμα, προκύπτει ότι:

- Πρόκειται για διάγραμμα θέσης – χρόνου (x - t).

- Επειδή η γραφική παράσταση είναι ευθεία, η σχέση των x και t είναι πρωτοβάθμια, άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή (υ=σταθ.).

- Η κίνηση τελειώνει τη χρονική στιγμή t = 6 sec. Άρα, η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι $\Delta t = t – t_o = 6s – 0 = 6s$.

- Σε χρονική διάρκεια Δt = 6 s, το κινητό μετατοπίζεται από τη θέση x_o = - 4 m στη θέση x = 8 m. Άρα η μετατόπισή του είναι $\Delta x = x – x_o$ = 8m – (- 4m) → Δx = 12 m.

- Τη χρονική στιγμή t = 2 s το αντικείμενο διέρχεται από τη θέση x = 0.

- Από τη στιγμή t = 0 μέχρι τη στιγμή t = 2 s είναι x < 0, δηλαδή το αντικείμενο κινείται στον αρνητικό ημιάξονα, Από τη χρονική στιγμή t = 2 s μέχρι τη στιγμή t = 6 s είναι x > 0, δηλαδή το κινητό κινείται στο θετικό ημιάξονα.

- Η σταθερή ταχύτητα του σημειακού αντικειμένου είναι: υ = Δx /Δt → υ = 12m/ 6s → υ = 2m/s . Επειδή είναι υ > 0, σε όλη τη διάρκεια της κίνησης κινείται προς τα θετικά του άξονα των x.

v) Αν μια ευθύγραμμη κίνηση αποτελείται από διαδοχικές κινήσεις τότε:

- Η συνολική μετατόπιση του κινητού έχει αλγεβρική τιμή $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots\cdots$
- Το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό είναι: $S_{ολ} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + \cdots\cdots$

vi) Όταν δύο κινητά συναντιούνται κάποια χρονική στιγμή t, τότε έχουν την ίδια θέση: $x_1 = x_2 = x$, όταν αυτές αναφέρονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

vii) Η έκφραση, να βρεθεί η μετατόπιση κατά τη διάρκεια του $4^{ου}$ (του $ν^{ου}$) sec της κίνησης σημαίνει: χρονική διάρκεια Δt = 4 – 3 = 1 sec, δηλαδή αναφέρεται σε χρονική διάρκεια από το τέλος του $3^{ου}$, μέχρι και το τέλος του $4^{ου}$ sec.

viii) Η μέση (αριθμητική) ταχύτητα ενός κινητού υπολογίζεται αν διαιρέσουμε το ολικό διάστημα με τον ολικό χρόνο της κίνησης, έστω και αν κάποια στιγμή το κινητό ήταν ακίνητο: $υ_μ = S_{ολ}/ t_{ολ}$ και έχει νόημα σε κινήσεις όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται.

Ευθύγραμμη Ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (ΕΟΕπιταχ – ΕΟΕπιβρ)

1) Κατά την εφαρμογή της σχέσης $\upsilon = \upsilon_o \pm \alpha t$, η ταχύτητα υ είναι αυτή που αποκτά το κινητό στο τέλος της χρονικής διάρκειας Δt = t – 0 = t και υ_o είναι η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t = 0. Έτσι αν σε ένα πρόβλημα μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την ταχύτητα ή το διάστημα σε κάποια συγκεκριμένη χρονική διάρκεια π.χ. μεταξύ του **5ου** και του **7ου** sec της κίνησης, η παραπάνω σχέση θα γραφτεί: $\boldsymbol{\upsilon_7 = \upsilon_5 \pm \alpha(t_7-t_5)}$ και το αντίστοιχο διάστημα: $\boldsymbol{S_{5,7} = \upsilon_5(t_7-t_5) \pm \frac{1}{2}\alpha(t_7-t_5)^2}$. Γι' αυτό καλό είναι στις σχέσεις αυτές να βάζουμε **Δt** αντί σκέτου **t**:

$$\boldsymbol{\upsilon = \upsilon_o + \alpha \cdot \Delta t} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\Delta x = \upsilon_o \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2}$$

2) Όταν σε μια ευθύγραμμη κίνηση δίνεται μια σχέση της μορφής υ = -10 + 2t (S.I.) τότε συγκρίνοντάς την με την αντίστοιχη σχέση της θεωρίας $\upsilon = \upsilon_o + \alpha t$ προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

α) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά **μεταβαλλόμενη**.

β) Η αρχική ταχύτητα του κινητού έχει αλγεβρική τιμή υ_o = - 10m/s.

γ) Η επιτάχυνση του κινητού έχει αλγεβρική τιμή α = 2m/s^2.

δ) Επειδή υ_0 ↓↑ α, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά **επιβραδυνόμενη** προς τα αρνητικά του άξονα (υ_0<0).

3) Όταν σε μια ευθύγραμμη κίνηση δίνεται μια σχέση της μορφής $x = 2t - 6t^2$ (S.I.), τότε συγκρίνοντάς την με την αντίστοιχη σχέση της θεωρίας $x = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

α) Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά **μεταβαλλόμενη**.

β) Η αρχική του ταχύτητα έχει αλγεβρική τιμή υ_o = 2m/s.

γ) Η επιτάχυνση του κινητού έχει αλγεβρική τιμή α = -3m/s^2.

δ) Επειδή υ_0 ↓↑ α, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά **επιβραδυνόμενη** προς τα θετικά του άξονα (υ_0>0)**.**

4) Από τα διαγράμματα x – t, υ – t, και α – t, μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για :

Διάγραμμα x – t :

α) τη θέση x για κάθε χρονική στιγμή με απ` ευθείας ανάγνωση,

β) την ταχύτητα υ κάθε χρονική στιγμή από την κλίση της γραφικής παράστασης,

Διάγραμμα υ – t :

α) την ταχύτητα υ κάθε χρονική στιγμή με απ` ευθείας ανάγνωση,

β) την επιτάχυνση α κάθε χρονική στιγμή από την κλίση της γραφικής παράστασης,

γ) την μετατόπιση Δx από το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων.

Διάγραμμα α – t :

α) την επιτάχυνση α κάθε χρονική στιγμή με απ` ευθείας ανάγνωση,

β) τη μεταβολή της ταχύτητας Δυ από το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων.

6) Από τις σχέσεις: $\upsilon = \upsilon_o \pm \alpha t$ και $\Delta x = \upsilon_o t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$ με απαλοιφή του χρόνου t, προκύπτει μια σχέση που συνδέει την ταχύτητα υ που αποκτά ένα κινητό, όταν αυτό έχει μετατοπιστεί κατά Δx η οποία πρέπει να αποδεικνύεται: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 \pm 2 \cdot \alpha \cdot \Delta x}$

Διαδοχικές κινήσεις

1) Κατασκευάζουμε κατάλληλο σχήμα, τοποθετώντας το κινητό στις θέσεις και τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές στις οποίες ***αλλάζει η κίνηση*** τοποθετώντας με σύμβολα όλα τα δεδομένα του προβλήματος πάνω στο σχήμα.

2) Αναγνωρίζουμε τα είδη των κινήσεων, χωρίζοντας τη συνολική κίνηση στα επιμέρους χρονικά διαστήματα.

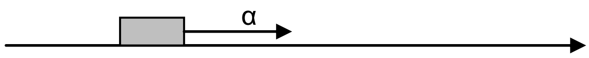
3) Γράφουμε για κάθε κίνηση τις εξισώσεις που ισχύουν, σχηματίζουμε ένα σύστημα τόσων εξισώσεων, όσοι είναι και οι άγνωστοι και απαντάμε στα ερωτήματα.

💣 Προσοχή!! Στις διαδοχικές κινήσεις ισχύει:

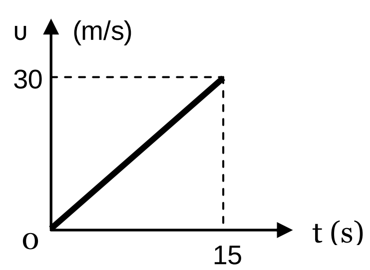
« Η τελική ταχύτητα της προηγούμενης κίνησης είναι η αρχική της επόμενης »

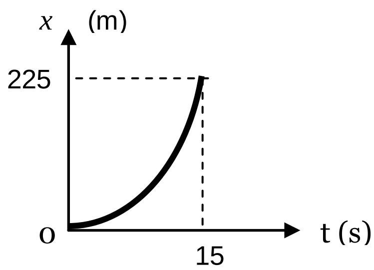
Προσοχή!!! Όταν δεν χρησιμοποιούμε άξονα για τη λύση μιας άσκησης τότε τα μεγέθη υ, α , $υ_0$, Δx στις σχέσεις $υ = υ_o \pm αt$ και $\Delta x = υ_o t \pm ½ αt^2$ αντικαθίστανται με τα μέτρα τους.

Παράδειγμα 1.
Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία και κινείται με σταθερή επιτάχυνση α = 2m/s². α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι $υ_1$ = 30 m/s και το διάστημα που έχει διανύσει μέχρι τότε. β) Να γίνει το διάγραμμα υ - t και s – t μέχρι τότε.
Απ:

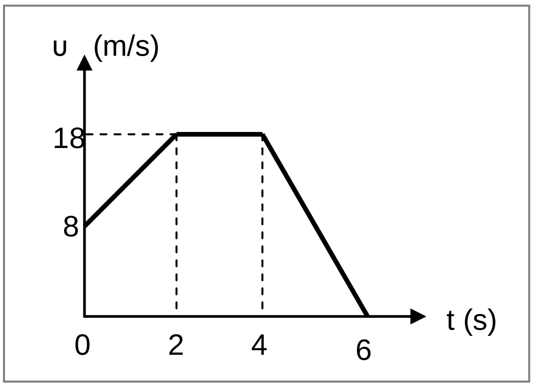


Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με $υ_0$=0, άρα: $\boldsymbol{υ = αt}$ και $\boldsymbol{x = ½ αt^2}$
Οπότε: $υ_1 = 2t_1 \to 30 = 2\cdot t_1 \to t_1 = 30/2 \to t_1 = 15$ s. Επίσης $s = x_1 = ½ αt_1^{\ 2} \to s = ½\ 2\cdot 15^2 \to$ $s = 225$ m.
Τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι:





Παράδειγμα 2.
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για ένα κινητό που κινείται ευθύγραμμα.
α. Να προσδιορίσετε το είδος της κίνησης σε καθεμία από τις τρεις φάσεις της.
β. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του κινητού από 2 - 6s.



Απ:
α. Από 0-2s η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με $\boldsymbol{α_1} = \frac{\Delta υ}{\Delta t} = \frac{18 - 8}{2 - 0} = \frac{10}{2} = 5$ m/s²

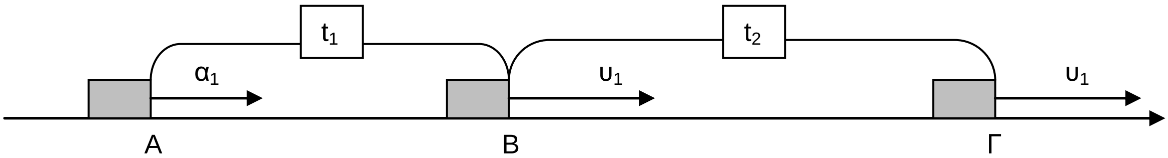
Από 2-4s η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή με $\alpha_2 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{18 - 18}{4 - 2} = \dfrac{0}{2} = 0$ m/s^2

Από 4-6s η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με $\alpha_3 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{0 - 18}{6 - 4} = \dfrac{-18}{2} = -9$ m/s^2

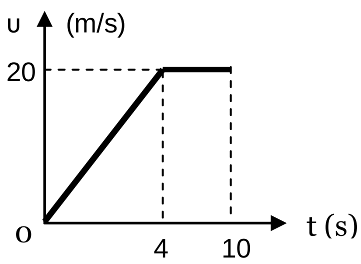
β. Η μετατόπιση του κινητού από 2-6s υπολογίζετε από το εμβαδόν του αντίστοιχου τραπεζίου της γραφικής παράστασης υ – t. Άρα **Δx = ½ (β+Β)·υψος** = ½[(4 - 2)+(6-2)]·18 = ½ (2+4)·18 = 3·18 → Δx = 54m.

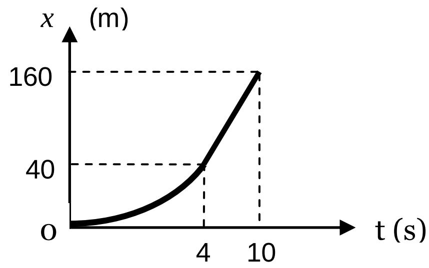
Παράδειγμα 3.

Ένα κινητό ξεκινά από την ηρεμία και κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α_1 = 5 m/s^2 για χρόνο t_1 = 4 s και στη συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα για χρόνο t_2 =6 s. α. Να υπολογιστεί η συνολική μετατόπιση του κινητού κατά τη διάρκεια της κίνησης του.
β. Να γίνουν τα διαγράμματα ταχύτητας - χρόνου (υ-t) και θέσης - χρόνου (x-t).



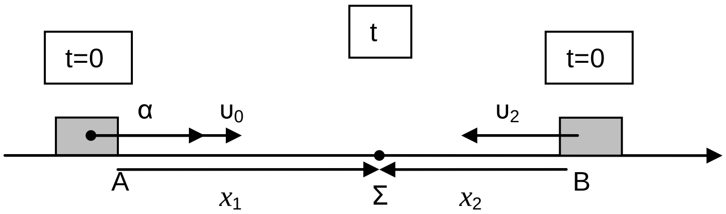
Απ:
Για χρόνο t_1 = 4 s μετατοπίζεται κατά ΑΒ =x_1 κάνοντας ευθ/μμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση άρα:
$\upsilon_1=\alpha_1\cdot t_1$ → υ_1=5·4 → **υ_1=20 m/s** και **x_1= ½ $\alpha_1 t_1^{\,2}$** → x_1= ½ 5·4^2 → x_1= 40 m.
Μετά τη χρονική στιγμή t_1 και για χρόνο t_2 =6 s κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα **υ_1=20 m/s**.
Άρα ΒΓ = **x_2= $\upsilon_1\cdot t_2$** → x_2= 20·6 → x_2= 120 m. Επομένως $\Delta x_{ολ} = x_1 + x_2$ = 40+120 → $\Delta x_{ολ}$ = 160 m.
Τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι:





Παράδειγμα 4.

Δύο κινητά Α και Β απέχουν d = 400 m .Τη χρονική στιγμή t=0 το κινητό Α έχει ταχύτητα 10m/s και επιταχύνεται με σταθερό ρυθμό 2m/s^2. Το άλλο κινητό Β έχει αντίρροπη αλλά σταθερή ταχύτητα 20m/s.
α. Πότε και που θα συναντηθούν τα δύο κινητά; β. Πόση η μετατόπιση κάθε κινητού μέχρι τη στιγμή της συνάντησης; γ. Ποια η ταχύτητα κάθε κινητού εκείνη τη στιγμή;



α. Έστω ότι θα συναντηθούν στο Σ τη στιγμή t.
Τότε **$x_1 = \upsilon_o t + ½ \alpha t^2$** και **$x_2 = \upsilon_2 t$** . Όμως $x_1 + x_2$ = d → 10t + ½ 2 t^2 + 20t=400 → t^2+30t-400=0 → t =1 0s.
β. Θα συναντηθούν σε απόσταση $x_2 = \upsilon_2$t = 20·10 =200m από το Β.
γ. Με ταχύτητες **υ_2=20m/s** και **$\upsilon_1 = \upsilon_0+\alpha t$** = 10+2·10=30 m/s.